Polinomi

Polinom stepena n je oblika $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$.

Bezoutova teorema Ostatak djeljenja polinoma $f(x)$ sa linearnim polinomom $x-c$ $(c\in\mathbb{C})$ jednak je $f(c)$.

Posljedica Broj $c\in\mathbb{C}$ je korijen polinoma $f(x)$ akko je $f(x)$ djeljiv sa $x-c$.

1. Rastaviti na faktore polinom $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$.

Rj. I način:

$x=1$: $f(1)=1+2-7-8+12=15-15=0$

Kako je $f(1)=0$ to je polinom $f(x)$ djeljiv sa $x-1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^4+2x^3-7x^2-8x+12):(x-1)=x^3+3x^2-4x-12\\
-\underline{x^4-x^3}\\
\quad 3x^3-7x^2-8x+12\\
\quad -\underline{3x^3-3x^2}\\
\qquad -4x^2-8x+12\\
\qquad -\underline{-4x^2+4x}\\
\qquad\quad -12x+12\\
\qquad\quad \underline{-12x+12}\\
\qquad\qquad //\ //
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$

$x=2$: $f(2)=1\cdot(2^3+3\cdot 4-8-12)=8+12-8-12=0$

Kako je $f(2)=0$ to je polinom $f(x)$ djeljiv sa $x-2$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-4x-12):(x-2)=x^2+5x+6\\
-\underline{x^3-2x^2}\\
\quad 5x^2-4x-12\\
\quad -\underline{5x^2-10x}\\
\qquad 6x-12\\
\qquad -\underline{6x-12}\\
\qquad\ //\ //
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x-2)\underbrace{(x^2+5x+6)}_{(x+2)(x+3)}$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

polinom rastavljen na faktore

II način: Hornerov algoritam

$f(2)=0 \Rightarrow$ Polinom $f(x)$ je djeljiv sa $x-2$

$f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

	1	2	−7	−8	12
2	1	2·1+2=4	2·4−7=1	2·1−8=−6	−12+12=0

$f(x)=(x-2)(x^3+4x^2+x-6)$

$g(x)=x^3+4x^2+x-6$

$g(1)=1+4+1-6=0 \Rightarrow$ Polinom $g(x)$ je djeljiv sa $x-1$

	1	4	1	−6
1	1	1·1+4=5	1·5+1=6	1·6−6=0

$g(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$

$f(x)=(x-2)(x-1)\underbrace{(x^2+5x+6)}_{(x+2)(x+3)}=(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

2. Polinom $f(x)=x^4+2x^3-25x^2-26x+120$ rastaviti na faktore.

Rj. I način

$f(1)=1+2-25-26+120\neq 0$

$f(-1)=1-2-25+26+120\neq 0$

$f(2)=16+16-100-52+120=32+20-52=0 \Rightarrow f(x)$ je djeljiv sa $x-2$

$$
\begin{array}{l}
(x^4+2x^3-25x^2-26x+120):(x-2)=x^3+4x^2-17x-60\\
-\underline{x^4-2x^3}\\
\quad 4x^3-25x^2-26x+120\\
\quad -\underline{4x^3-8x^2}\\
\qquad -17x^2-26x+120\\
\qquad -\underline{-17x^2+34x}\\
\qquad\qquad -60x+120\\
\qquad\qquad \underline{-60x+120}\\
\qquad\qquad\ //\ //
\end{array}
$$

$f(x)=(x-2)(x^3+4x^2-17x-60)$

$g(x)=x^3+4x^2-17x-60$

$g(3) = 27+36-51-60 \neq 0$

$g(-3) = -27+36+51-60 = 87-87=0$

polinom $g(x)$ je djeljiv sa $x+3$

$$(x^3+4x^2-17x-60):(x+3) = x^2+x-20$$
$$\underline{-\ x^3+3x^2}$$
$$x^2-17x-60$$
$$\underline{-\ x^2+3x}$$
$$-20x-60$$
$$\underline{-20x-60}$$
$$= \quad =$$

$f(x) = (x-2)(x+3)\underbrace{(x^2+x-20)}_{(x-4)(x+5)}$

$f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$ polinom rastavljen na faktore

II način: Hornerov Algoritam

$f(x) = x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

$f(4) = 256+128-400-104+120 = 504-504 = 0 \Rightarrow f(x)$ je djeljiv sa $(x-4)$

	1	2	-25	-26	120
4	1	$4\cdot1+2=6$	$4\cdot6-25=-1$	$(-1)\cdot4-26=-30$	$4\cdot(-30)+120=0$

$f(x) = (x-4)(x^3+6x^2-x-30)$

$g(x) = x^3+6x^2-x-30$

$g(-5) = -125+150+5-30 = 125-125 = 0 \Rightarrow g(x)$ je djeljiv sa $(x+5)$

	1	6	-1	-30
-5	1	$-5+6=1$	$-5-1=-6$	$30-30=0$

$g(x) = (x+5)\underbrace{(x^2+x-6)}_{(x-2)(x+3)}$

$f(x) = (x-4)(x+5)(x-2)(x+3)$

3. Rastaviti na faktore polinom $f(x) = x^5-x^4-37x^3+61x^2+336x-720$

Rj. $f(x) = (x-3)^2(x-4)(x+4)(x+5)$

$f(x) = x^5-x^4-37x^3+61x^2+336x-720$

Naći ostatak pri djeljenju polinoma $p(x)$ sa $(x-1)(x^2+1)$ ako je ostatak pri djeljenju $p(x)$ sa $x-1$ jednak 1 a sa x^2+1 jednak $x+2$.

Rj: $p(x) = (x-1)(x^2+1)q(x) + ax^2+bx+c \qquad (1)$

$p(x) = (x-1)q_1(x)+1 \qquad (2)$

$p(x) = (x^2+1)q_2(x) + x+2 \qquad (3)$

ostatak djeljenja $p(x)$ sa $x-1$ je $p(1)$.

(2): $p(1) = 1$

(1): $p(1) = a+b+c$

ostatak djeljenja $p(x)$ sa $x^2+1=(x-i)(x+i)$ je $p(i)$ i $p(-i)$

(3): $p(i) = i+2$

(1): $p(i) = -a+ib+c$ $\Big\} \Rightarrow$ $b=1$, $c-a=2$

$$a+1+c=1$$
$$\underline{-a \quad +c=2}$$
$$a+c=0$$
$$\underline{-a+c=2}$$
$$2c=2$$
$$c=1 \Rightarrow a=-1$$

Ostatak djeljenja polinoma $p(x)$ sa $(x-1)(x^2+1)$ je $-x^2+x+1$

Dokazati da je polinom $P_{2n+1}(x) = (x+a+b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$ djeljiv sa $P_3(x)$ za $\forall(n\in N)$.

uputa:

$P_3(x) = \ldots = 3(a+b)(x+a)(x+b)$

$P_{2n+1}(-a) = \ldots = 0 \Rightarrow x+a \mid P_{2n+1}(x)$ (ovo se čita: $x+a$ dijeli $P_{2n+1}(x)$)

$P_{2n+1}(-b) = \ldots = 0 \Rightarrow x+b$ dijeli $P_{2n+1}(x)$

Odrediti ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)=x^{200}-3x^{199}-1$ polinomom x^2-4x+3.

Rj. $g(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

Kad neki polinom $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ djelimo nekim polinomom $g(x)=b_kx^k+\dots+b_1x+b_0$ ostatak $r(x)$ može biti najviše stepena $k-1$.

$p(x)=g(x)\cdot g(x)+r(x)$

$f(x)=x^{200}-3x^{199}-1=(x^2-4x+3)g(x)+ax+b=(x-1)(x-3)+ax+b$

$f(3)=0+3a+b$

$f(1)=0+a+b$ ...(*)

$f(x)=x^{200}-3x^{199}-1$

$f(1)=1-3-1=-3$

$f(3)=3^{200}-3\cdot 3^{199}-1=-1$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 3a+b=-1 \\ -\quad a+b=-3 \\ \hline 2a=2 \end{array}$$

$a=1 \Rightarrow b=-4$

Ostatak djeljenja polinoma $f(x)$ sa polinomom x^2-4x+3 je $x-4$.

Odrediti koeficijente a,b,c polinoma $f(x)=ax^2+bx+c$ tako da bude $f(1)+f(2)+\dots+f(n)=n^2$, $\forall(n\in\mathbb{N})$.

Rj. $f(n)=an^2+bn+c$ ... (*)

$f(n)=f(1)+f(2)+\dots+f(n)-f(1)-f(2)-\dots-f(n-1)$

$=(f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)+f(n))-(f_1+f(2)+\dots+f(n-1))$

$=n^2-(n-1)^2=n^2-n^2+2n-1=2n-1$ ...(**)

(*) i (**) $\Rightarrow$ $a=0$, $b=2$, $c=-1$.

U skupu $\mathbb{N}$ definisana je f-ja f sa $f(n)=f(n-1)+a^n$, $n\geq 2$ i $f(1)=1$. Izraziti $f(n)$ pomoću a i n. Razmotriti slučajeve $a\neq 1$ i $a=1$.

Rj. $f(n)=f(n-1)+a^n$, $n\geq 2$

$f(1)=1$

$f(2)=f(1)+a^2=1+a^2$

$f(3)=f(2)+a^3=1+a^2+a^3$

$\vdots$

$f(n)=f(n-1)+a^n=1+a^2+a^3+\dots+a^n$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} z^n = z\cdot\frac{1-z^{N+1}}{1-z}}$$

za $a=1$:

$f(n)=1+1^2+1^3+\dots+1^n=n$

za $a>1$:

$f(n)=1+a^2+a^3+\dots+a^n$

$=1+a^2(1+a+\dots+a^{n-2})$

$=1+a^2\cdot\dfrac{1-a^{n-1}}{1-a}=$

$=\dfrac{1}{1-a}(1-a+a^2(1-a^{n-1}))$

$=\dfrac{1}{1-a}(1-a+a^2-a^{n+1})$

$=\dfrac{1}{a-1}(a^{n+1}-a^2+a-1)$

Prema tome

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-1}(a^{n+1}-a^2+a-1), & \text{za } a\neq 1\\ n, & \text{za } a=1\end{cases}$$

(istu vrijednost dobijamo i za $a<1$)

Odrediti brojeve A i B tako da polinom $f(x)=Ax^{n+1}+Bx^n+1$, $n\in\mathbb{N}$ bude djeljiv sa x^2-2x+1.

Uputa:

$f(1)=A+B+1=0$

$f(x)=\dots=-Bx^n(x-1)-(x-1)(x^n+x^{n-1}+\dots+x+1)=$

$=(x-1)(-Bx^n-x^n-x^{n-1}-\dots-x-1)=(x-1)g(x)$

$g(1)=0 \Rightarrow \dots\ B=-n-1 \Rightarrow A=n$

Dat je polinom $f(x)=(b-a)x^n+2^na-b$, $a,b\in\mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa x^2-3x+2 bude $(2^n-1)x$. Rj. $a=1$, $b=2$

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

\# Odrediti koeficijente a, b, c tako da polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ bude djeljiv polinomima $x-1$ i $x+2$ a pri dijeljenju sa $x-4$ daje ostatak 18.

R: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

ostatak dijeljenja polinoma $f(x)$ sa linearnim polinomom $x-c$ jednak je $f(c)$

$p(x)$ djeljiv sa $x-1$ $\Rightarrow$ $p(1)=0$ $\Rightarrow$ $1+a+b+c=0$

$p(x)$ djeljiv sa $x+2$ $\Rightarrow$ $p(-2)=0$ $\Rightarrow$ $-8+4a-2b+c=0$

$p(x)$ pri dijeljenju sa $x-4$ daje ostatak 18 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $p(4)=18$ $\Rightarrow$ $64+16a+4b+c=18$

Sistem tri jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{aligned} a+b+c&=-1 && (1)\\ 4a-2b+c&=8 && (2)\\ 16a+4b+c&=-46 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)-(1):&\quad 3a-3b=9\\ (2)-(1):&\quad 15a+3b=-45 \end{aligned}$$

$18a=-36$

$a=-2$

$-3b=9+6$

$b=-5$

$-2-5+c=-1$

$c=6$

Traženi koeficijenti su

$a=-2,\ b=-5,\ c=6$

\#[v] Dokazati da je polinom $f(x)=(\cos\varphi + x\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - x\sin n\varphi$ djeljiv sa x^2+1.

Uputa: $x^2+1=(x-i)(x+i)$

$$\left.\begin{aligned} f(i)&=\ldots=0\\ f(-i)&=\ldots=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x-i)(x+i) \mid f(x)$$